Europ. J. Combinatorics (1997) **18,** 75–92

Fractions Continues, q-Nombres de Catalan et q-Polynômes de Genocchi

ARTHUR RANDRIANARIVONY†

In this paper, we propose to study the expansion of two continued fractions of Jacobi type and Stieltjes type into series. We also propose new q-Catalan numbers and give a new combinatorial interpretation of Carlitz's q-Catalan numbers.

1. INTRODUCTION

Le but de cet article est d'étudier le développement en série de la fraction continue de type Jacobi

$$I(x,y,z,u,q;t)=\cfrac{1}{1-xt-\cfrac{uqt^2}{1-xuq^2t-\cfrac{u^3q^3(y+zq^2)t^2}{\ddots\;\cfrac{}{1-xu^nq^{2n}t-\cfrac{u^{2n+1}q^{2n+1}[n+1]_{y,zq^2}t^2}{\ddots}}}}} \tag{1.1}$$

et de la fraction continue de type Stieltjes

$$G(x,q;t)=\cfrac{1}{1-\cfrac{qt}{1-\cfrac{q^2(1+xq)t}{\ddots\;\cfrac{}{1-\cfrac{q^{2n-1}[n]_q^2t}{1-\cfrac{q^{2n}[n]_q([n]_q+xq^n)t}{\ddots}}}}}} \tag{1.2}$$

Dans les deux expressions ci-dessus, les notations suivantes ont été utilisées

$$[n]_q=1+q+\cdots+q^{n-1},$$
$$[n]_{a,b}=a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+b^{n-1}.$$

Comme il est bien connu [9], les coefficients $\mathrm{I}_n(x,y,z,u,q)$ dans le premier développement $(\mathrm{I}(x,y,z,u,q;t)=\sum_{n\geqslant 0}\mathrm{I}_n(x,y,z,u,q)t^n)$ et $G_n(x,q)$ dans le second $(\mathrm{G}(x,q;t)=\sum_{n\geqslant 0}\mathrm{G}_n(x,q)t^n)$ sont des polynômes respectivement en les variables x, y, z, u, q et x, q et sont entièrement déterminés par la donnée de ces fractions continues. Dans des cas particuliers, ces coefficients on été déjà étudiés par certains auteurs. Par exemple, dans le premier développement, les cas $x=y=z=u=q=1$ et $x=0$, $y=z=u=q=1$ ont été traités par Flajolet [9]. Il a interprété I_n en termes d'involutions (avec point fixe dans le premier cas et sans point fixe dans le second). Les cas $x=y=z=q=1$ et $x=0$, $y=z=q=1$, ont été étudiés par Françon [11]. Les I_n ont été interprétés en termes de polynômes générateurs sur les involutions (avec et

† Avec le concours du programme des Communautés Européennes en Combinatoire Algébrique, 1994–95.

0195-6698/97/010075 + 18 $25.00/0 ej960087

sans point fixe) suivant la statistique '*somme des pics de cycles moins somme des creux de cycles*'. Les cas $x = 0$, $z = u = q = 1$ et $x = 0$, $u = q = 1$, $z = y^2$, ont été étudiés par de Médicis et Viennot [15]. Les I_n, dans ces conditions, sont les moments des q-polynômes de Hermite de 1-ière et 2-ième espèces. Ces deux auteurs ont interprété ces moments en termes de polynômes générateurs sur les involutions sans point fixe suivant les statistiques '*nombre de croisements*' et '*nombre de paires imbriquées*'.

Dans les second développement, le cas $x = q = 1$ a été étudié par Viennot [17] d'une part, et par Dumont et Zeng [8] d'autre part. Ils ont interprété $G_n(1, 1)$ comme étant le nombre de Genocchi G_{2n+2}. Les deux derniers auteurs ont également traité le cas $x = 0$, $q = 1$ et ont prouvé que $G_n(0, 1)$ est égal au nombre de Genocchi médian H_{2n+1}.

Rappelons que les nombres de Genocchi G_{2n} $(n \geqslant 1)$ sont définis classiquement par la relation [14]

$$\frac{2t}{e^t+1} = t - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \frac{3t^6}{6!} + \frac{17t^8}{8!} - \frac{155t^{10}}{(10)!} + \cdots + (-1)^n G_{2n}\frac{t^{2n}}{(2n)!} + \cdots,$$

et que, si $(e_{n,k})_{n,k \geqslant 0}$ désigne la *matrice de Seidel* des nombres de Genocchi (cf. par exemple, [7] pour les propriétés élémentaires de cette matrice), à savoir,

$$\begin{cases} e_{0,0} = 0, \quad e_{0,1} = 1, \quad e_{0,2k} = (-1)^k G_{2k}, \quad e_{0,2k+1} = 0 \qquad (k \geqslant 1), \\ e_{n,k} = e_{n-1,k} + e_{n-1,k+1} \qquad (k \geqslant 0,\, n \geqslant 1), \end{cases}$$

le nombre de Genocchi médian H_{2n+1} est égal à $(-1)^n e_{n,n+1}$.

Voici le tableau des premières valeurs des H_{2n+1}:

n	0	1	2	3	4	5
H_{2n+1}	1	1	2	8	56	608

On doit à Dumont d'avoir démontré [5] que G_{2n+2} est égal au nombre de *permutations de Genocchi* de $[2n] := \{1, 2, \ldots, 2n\}$, i.e. des permutations τ de $[2n]$ telles que $\tau(2i-1) > 2i-1$ et $\tau(2i) \leqslant 2i$ pour tout $i \in [n]$. Récemment nous avons démontré dans [6] que H_{2n+1} est égal au nombre de permutations de Genocchi sans point fixe de $[2n]$.

Notre contribution ici consiste à interpréter les polynômes I_n et G_n en termes de polynômes générateurs respectivement sur l'ensemble Involl(n) des involutions de $[n]$ et sur l'ensemble $\mathcal{G}_{2n}$ des permutations de Genocchi de $[2n]$ par des suites de prédicats géométriques ainsi définis.

Étant donnée une permutation σ de $[n]$, on dira qu'un entier i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ est:

(i) un pic de cycle de σ si $\sigma^{-1}(i) < i > \sigma(i)$;
(ii) un creux de cycle de σ si $\sigma^{-1}(i) > i < \sigma(i)$;
(iii) une double montée de cycle de σ si $\sigma^{-1}(i) < i < \sigma(i)$;
(iv) une double descente de cycle de σ si $\sigma^{-1}(i) > i > \sigma(i)$;
(v) un point fixe de σ si $\sigma(i) = i$.

On note respectivement pc(σ) et fix(σ) le nombre de pics de cycles et le nombre de points fixes de σ. On note $D(\sigma)$ la somme des pics de cycles de σ moins la somme des creux de cycles de σ, inv(σ) le nombre de ses *inversions*, c'est-à-dire,

$$\mathrm{inv}(\sigma) = |\{(i, j);\, 1 \leqslant i < j \leqslant n,\, \sigma(i) > \sigma(j)\}|$$

où, dans la suite, $|E|$ désigne le nombre d'éléments d'un ensemble E. On doit à de Médicis et Viennot d'avoir défini [15] les statistiques 'cr' (nombre de *croisements*) et 'pbr' (nombre de *paires imbriquées*) par

$$\mathrm{cr}(\sigma) = |\{(i, j);\, 1 \leqslant i < j < \sigma(i) < \sigma(j) \leqslant n\}|,$$
$$\mathrm{pbr}(\sigma) = |\{(i, j);\, 1 \leqslant i < j < \sigma(j) < \sigma(i) \leqslant n\}|.$$

Notre but principal est d'établir les deux théorèmes suivants.

THÉORÈME 1.1. *Pour tout $n \geqslant 1$, on a l'interprétation suivante:*

$$\mathrm{I}_n(x, y, z, u, q) = \sum_{\sigma \in \mathrm{Invol}(n)} x^{\mathrm{fix}(\sigma)} y^{\mathrm{cr}(\sigma)} z^{\mathrm{pbr}(\sigma)} u^{\mathrm{D}(\sigma)} q^{\mathrm{inv}(\sigma)}.$$

THÉORÈME 1.2. *Pour tout $n \geqslant 1$, on a l'interprétation suivante:*

$$\mathrm{G}_n(x, q) = \sum_{\sigma \in \mathscr{G}_{2n}} x^{\mathrm{fix}(\sigma)} q^{\mathrm{inv}(\sigma)}.$$

Le point de départ de toutes ces études combinatoires sur les fractions continues reste toujours le théorème de Flajolet [9].

Étant donné un chemin de Motzkin γ, si on associe la lettre a_k (resp. b_k, c_k) à une montée (resp. une descente, un palier) de γ de niveau k, on appelle valuation de γ et on note $v(\gamma)$ le produit des lettres associées à ses pas.

THÉORÈME 1.3 (Flajolet). *La série génératrice ordinaire des valuations des chemins de Motzkin de longueur n admet le développement en fraction continue suivant*:

$$1 + \sum_{n \geqslant 1} \Big(\sum_{\gamma \in \mathscr{M}(n)} v(\gamma) \Big) t^n = \cfrac{1}{1 - c_0 t - \cfrac{a_0 b_1 t^2}{1 - c_1 t - \cfrac{a_1 b_2 t^2}{\cfrac{\ddots}{1 - c_n t - \cfrac{a_n b_{n+1} t^2}{\ddots}}}}},$$

où $\mathscr{M}(n)$ désigne l'ensemble des chemins de Motzkin de longueur n.

Il s'agit ensuite de construire une correspondance entre l'ensemble des chemins de Motzkin et une certaine classe de permutations. On doit à Biane d'avoir construit une bijection [2] entre l'ensemble des chemins marqués et l'ensemble $\mathfrak{S}_\mathrm{n}$ des permutations de $[n]$.

Rappelons tout d'abord qu'un *chemin de Motzkin* de longueur n est une suite $c = (c_0, c_1, \ldots, c_n)$ de $n+1$ entiers telle que:
(i) $c_i \geqslant 0$ pour tout $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$;
(ii) $|c_i - c_{i-1}| \leqslant 1$ pour tout $i \in [n]$;
(iii) $c_0 = c_n = 0$.
Le couple (c_{i-1}, c_i) est la *i-ème étape* ou l'*étape de position i* du chemin, c_{i-1} son *niveau.* On dit que cette étape est une *montée* (resp. une *descente,* un *palier*) si $c_i = c_{i-1} + 1$ (resp. $c_i = c_{i-1} - 1$, $c_i = c_{i-1}$). On note $\mathrm{Mont}(c)$ (resp. $\mathrm{Des}(c)$, $\mathrm{Pal}(c)$) l'ensemble des $i \in [n]$ tels que la i-ème étape est une montée (resp. une descente, un palier) de c. Un chemin de Motzkin sans palier est appelé *chemin de Dyck.*

Un chemin marqué de longueur n est un couple (c, ξ) où $c = (c_0, \ldots, c_n) \in \mathscr{M}(n)$ et $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ une suite de n éléments de $\mathbb{N}^2$ telle que, pour tout $i \in [n]$:
(i) $i \in \mathrm{Mont}(c) \Leftrightarrow \xi_i = (0, 0)$;
(ii) $i \in \mathrm{Des}(c) \Leftrightarrow \xi_i \in [c_{i-1}] \times [c_{i-1}]$;
(iii) $i \in \mathrm{Pal}(c) \Leftrightarrow \xi_i \in \{0\} \times [c_{i-1} + 1] \cup [c_{i-1}] \times \{0\}$.

THÉORÈME 1.4 (Biane). *Il existe une bijection $\varphi: (c, \xi) \mapsto \sigma$ de l'ensemble des chemins marqués de longueur n sur l'ensemble $\mathfrak{S}_n$ des permutations de $[n]$, ayant les propriétés suivantes:*
(i) *i est un creux de cycle de σ ssi $\xi_i = (0, 0)$;*
(ii) *i est un pic de cycle de σ ssi $\xi_i \in [c_{i-1}] \times [c_{i-1}]$;*

(iii) *i est une double montée de cycle de* σ *ssi* $\xi_i \in [c_{i-1}] \times \{0\}$;
(iv) *i est une double descente de cycle de* σ *ssi* $\xi_i \in \{0\} \times [c_{i-1}]$;
(v) *i est un point fixe de* σ *ssi* $\xi_i = (0, c_{i-1} + 1)$.
De plus,

$$\mathrm{inv}(\sigma) = \sum_{i \in \mathrm{Des}(c)} (|\xi_i| + 2c_{i-1} - 3) + \sum_{i \in \mathrm{Pal}(c)} (|\xi_i| + c_{i-1} - 1)$$

où $|(k, l)| = k + l$.

Remarque. (1) Pour la commodité, nous avons modifié la définition du *chemin marqué* donnée par Biane.

(2) D'après la construction de la bijection φ,

$$c_i = |\{j \leqslant i; \sigma(j) > i\}| = |\{j \leqslant i; \sigma^{-1}(j) > i\}| \tag{1.3}$$

et, si $\xi_i = (\xi_i^-, \xi_i^+)$ et $\xi_i^- \neq 0$ (resp. $\xi_i^+ \neq 0$), alors

$$\begin{gathered} \xi_i^- = |\{j; j \leqslant \sigma^{-1}(i), \sigma(j) \geqslant i\}| \\ (\text{resp. } \xi_i^+ = |\{j; j \leqslant \sigma(i), \sigma^{-1}(j) \geqslant i\}|). \end{gathered} \tag{1.4}$$

Le Théorème 1.1, démontré dans le paragraphe 3, repose sur ces deux derniers théorèmes. En fait, nous n'avons besoin que de la bijection de Biane restreinte à l'ensemble des involutions dont nous rappelons la construction dans le paragraphe 2. Le Théorème 1.2 repose également sur le Théorème 1.3 et sera démontré dans le paragraphe 6 où nous allons construire une bijection entre $\mathscr{G}_{2n}$ et une certaine classe de chemins valués en utilisant une méthode qui ressemble à peu près à celle utilisée par Foata et Zeilberger dans [10].

Comme conséquences, le Théorème 1.1 nous permet de retrouver la formule obtenue par de Médicis et Viennot [15] (voir Proposition 4.2), et nous fournit, d'une part, des propriétés intrinsèques de plusieurs spécialisations des polynômes $\mathrm{I}_n(x, y, z, u, q)$ qui ont mérité une étude particulière proposée dans le paragraphe 4, et, d'autre part, de nouvelles interprétations combinatoires du q-analogue des nombres de Catalan de Carlitz $\tilde{\mathrm{C}}_n(q)$ défini par

$$\tilde{C}_n(q) = \sum_{0 \leqslant k \leqslant n-1} q^k \tilde{C}_k(q) \tilde{C}_{n-1-k}(q) \qquad (\tilde{C}_0(q) = 1), \tag{1.5}$$

que nous verrons dans le paragraphe 5. Ces q-nombres de Catalan ont été introduits par Carlitz et Riordan [3] et ont été étudiés par Carlitz et Scoville [4], Fürlinger et Hofbauer [12], Andrews [1], puis Rawlings [16], et enfin Krattenthaler [13].

Pour terminer, le Théorème 1.2 nous permet de retrouver les développements en fractions continues des séries génératrices ordinaires des nombres de Genocchi et des nombres de Genocchi médians (voir Proposition 6.4).

2. La Bijection de Biane

Soient τ une involution de $[n]$ et (c, ξ) son chemin marqué associé par φ. Comme τ n'a ni double montée, ni double descente, alors

$$\text{pour tour } i \in [n] \qquad (i \in \mathrm{Pal}(c) \Leftrightarrow \sigma(i) = i).$$

En outre, d'après (1.4), on a:

$$\text{pour tout } i \in \mathrm{Des}(c), \qquad \xi_i^- = \xi_i^+.$$

Définition 2.1. Un *chemin simplement marqué* de longueur n est un couple (c, α)

où $c=(c_0,\ldots,c_n)$ est un chemin de Motzkin de longueur n et $\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ une suite de n entiers $\geqslant 0$ telle que, pour tout $i\in[n]$:
(i) $i\in \mathrm{Mont}(c)\Leftrightarrow \alpha_i=0$;
(ii) $i\in \mathrm{Des}(c)\Leftrightarrow \alpha_i\in[c_{i-1}]$;
(iii) $i\in \mathrm{Pal}(c)\Leftrightarrow \alpha_i=c_{i-1}+1$.

Notons *inj* l'application de l'ensemble des chemins simplement marqués de longueur n dans l'ensemble des chemins marqués de longueur n qui, à (c,α), fait correspondre (c,ξ) telle que

$$\xi_i=\begin{cases}(0,0) & \text{si } \alpha_i=0;\\ (\alpha_i,\alpha_i) & \text{si } 1\leqslant\alpha_i\leqslant c_{i-1};\\ (0,c_{i-1}+1) & \text{si } \alpha_i=c_{i-1}+1.\end{cases}\tag{2.1}$$

La construction que nous donnons ci-après est celle de $\Phi=\varphi\circ inj$, où φ est la bijection de Biane. Elle envoie donc les chemins simplement marqués de longueur n sur les involutions de $[n]$.

Construction de Φ. Pour la commodité, on considère l'ensemble des involutions d'un ensemble $U=\{u_1,u_2,\ldots,u_n\}$ totalement ordonné $(u_1<u_2<\ldots<u_n)$.

Soit (c,α) un chemin simplement marqué de longueur n. On définit l'involution $\tau=\Phi(c,\alpha)$ de U par l'algorithme suivant.

La première étape consiste à tracer un point noté u_1. On l'entoure ensuite d'un petit cercle si $1\in\mathrm{Pal}(c)$.

A l'étape i de l'algorithme, on trace un point noté u_i à droite du précédent puis:
(1) si $i\in\mathrm{Mont}(c)$, on ne trace rien;
(2) si $i\in\mathrm{Pal}(c)$, on entoure u_i d'un petit cercle;
(3) si $i\in\mathrm{Des}(c)$, on trace un arc de sommets u_i et u_{k_i}, où u_{k_i} est le α_i-ième point de U qui n'est pas encore entouré d'un cercle, ni sommet d'un arc.

Comme c_i est égal à la différence du nombre de montées et du nombre de descentes des i premières étapes de c, tout point de U est, soit entouré d'un cercle, soit sommet d'un arc après la n-ième étape de l'algorithme. On définit alors τ par:
(i) $\tau(u_i)=\tau^{-1}(u_i)=u_i$ si u_i est entouré d'un cercle;
(ii) $\tau(u_i)=\tau^{-1}(u_i)=u_j$ si u_i et u_j sont sommets d'un même arc.

THÉORÈME 2.2. *L'application* Φ *ainsi définie est une bijection de l'ensemble des chemins simplement marqués de longueur n sur* Invol(n) *telle que, si* $\tau=\Phi(c,\alpha)$, *alors:*
(P_1) *i est un creux de cycle de* τ *ssi* $\alpha_i=0$;
(P_2) *i est un pic de cycle de* τ *ssi* $\alpha_i\in[c_{i-1}]$;
(P_3) *i est un point fixe de* τ *ssi* $\alpha_i=c_{i-1}+1$.

DÉMONSTRATION. Il est clair que Φ vérifie les propriétés (P_1), (P_2) et (P_3). Montrons qu'elle est bijective. Pour cela, nous allons construire sa réciproque (voir exemple).

Soit τ une involution de U. Désignons par τ_i l'application de $\mathrm{U}_i=\{u_1,u_2,\ldots,u_i\}$ dans $\mathrm{U}_i\cup\{\infty\}$ $(1\leqslant i\leqslant n)$ définie par

$$\tau_i(u)=\begin{cases}\tau(u) & \text{si } \tau(u)\in\mathrm{U}_i;\\ \infty & \text{si } \tau(u)\notin\mathrm{U}_i;\end{cases}\qquad \text{pour tout } u\in\mathrm{U}_i.$$

Soit c_i le nombre de points u de U_i tels que $\tau_i(u)=\infty$ $(c_0=0)$. Il est clair que $c=(c_0,c_1,\ldots,c_n)$ est un chemin de Motzkin de longueur n.

D'autre part:
(1) si $\tau_i(u_i)=\infty$, on pose $\alpha_i=0$;

(2) si $\tau_i(u_i)=u_i$, on pose $\alpha_i=c_{i-1}+1$;
(3) si $\tau_i(u_i)=u_j$ $(j<i)$, on pose $\alpha_i=|\{k\leqslant j;\ \tau_{i-1}(u_k)=\infty\}|$.
Il en résulte que (c,α) est un chemin simplement marqué de longueur n et l'application $\tau\mapsto(c,\alpha)$ est bien la réciproque de Φ. □

Exemple. Soit $\tau=(16)(24)(3)(58)(7)$ une involution de [8]. Voici les étapes de l'algorithme (inverse):

$$\tau_1=\begin{pmatrix}1\\ \infty\end{pmatrix} \to (c_1,\alpha_1)=(1,0),$$

$$\tau_2=\begin{pmatrix}1&2\\ \infty&\infty\end{pmatrix} \to (c_2,\alpha_2)=(2,0),$$

$$\tau_3=\begin{pmatrix}1&2&3\\ \infty&\infty&3\end{pmatrix} \to (c_3,\alpha_3)=(2,3),$$

$$\tau_4=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\ \infty&4&3&2\end{pmatrix} \to (c_4,\alpha_4)=(1,2),$$

$$\tau_5=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\ \infty&4&3&2&\infty\end{pmatrix} \to (c_5,\alpha_5)=(2,0),$$

$$\tau_6=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\ 6&4&3&2&\infty&1\end{pmatrix} \to (c_6,\alpha_6)=(1,1),$$

$$\tau_7=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\ 6&4&3&2&\infty&1&7\end{pmatrix} \to (c_7,\alpha_7)=(1,2),$$

$$\tau_8=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\ 6&4&3&2&8&1&7&5\end{pmatrix} \to (c_8,\alpha_8)=(0,1).$$

Son chemin simplement marqué associé est donc

$$(c,\alpha)=((0,1,2,2,1,2,1,1,0),(0,0,3,2,0,1,2,1)).$$

3. Démonstration du Théorème 1.1

La bijection de Biane, modifiée au paragraphe 2, nous permet maintenant de prendre en charge les statistiques 'cr', 'pbr' et 'D' définies dans l'introduction et d'établir le Théorème 1.1.

Proposition 3.1. *Si le chemin simplement marqué (c,α) est envoyé par Φ sur l'involution $\tau=\Phi(c,\alpha)$, alors*

$$\mathrm{cr}(\tau)=\sum_{i\in \mathrm{Des}(c)}(c_{i-1}-\alpha_i),\qquad \mathrm{pbr}(\tau)=\sum_{i\in\mathrm{Des}(c)}(\alpha_i-1), \tag{3.1}$$

$$\mathrm{inv}(\tau)=\sum_{i\in\mathrm{Des}(c)}(2c_{i-1}+2\alpha_i-3)+\sum_{i\in\mathrm{Pal}(c)}2c_{i-1}, \tag{3.2}$$

$$\mathrm{D}(\tau)=c_0+c_1+\cdots+c_n. \tag{3.3}$$

Démonstration. Soient $\tau\in\mathrm{Invol}(n)$ et $(c,\alpha)=\Phi^{-1}(\tau)$.

(a) D'après la construction de Φ, on a:

$$c_{i-1} = |\{j; j < i,\ \tau(j) \geqslant i\}| \qquad (1 \leqslant i \leqslant n),$$
$$\alpha_i = |\{j; j \leqslant \tau(i),\ \tau(j) \geqslant i\}| = 1 + |\{j; j < \tau(i),\ \tau(j) > i\}| \qquad (i \in \mathrm{Des}(c)).$$

Il en résulte que, pour tout $i \in \mathrm{Des}(c)$,

$$c_{i-1} - \alpha_i = |\{j;\ \tau(i) < j < i \leqslant \tau(j)\}| = |\{l;\ \tau(i) < \tau(l) < i < l\}|,$$
$$\alpha_i - 1 = |\{j; j < \tau(i) < i < \tau(j)\}| = |\{l;\ \tau(l) < \tau(i) < i < l\}|.$$

Or, puisque $\tau = \tau^{-1}$, on a

$$\mathrm{cr}(\tau) = |\{(i, j);\ \tau(i) < \tau(j) < i < j\}| = \sum_i |\{j;\ \tau(i) < \tau(j) < i < j\}|,$$

$$\mathrm{pbr}(\tau) = |\{(i, j);\ \tau(j) < \tau(i) < i < j\}| = \sum_i |\{j;\ \tau(j) < \tau(i) < i < j\}|.$$

Donc on obtient la relation (3.1).

(b) On peut écrire

$$\mathrm{inv}(\tau) = \sum_{j < \tau(j)} |\{i < j;\ \tau(i) > \tau(j)\}| + \sum_{j = \tau(j)} |\{i < j;\ \tau(i) > j\}| + \sum_{j > \tau(j)} |\{i < j;\ \tau(i) > \tau(j)\}|.$$

Notons respectivement A, B et C les trois sommes du second membre. On a:

$$\mathrm{A} = |\{(i, j); i < j < \tau(j) < \tau(i)\}| = \mathrm{pbr}(\tau),$$

$$\mathrm{B} = \sum_{j = \tau(j)} |\{i < j;\ \tau(i) \geqslant j\}| = \sum_{j \in \mathrm{Pal}(c)} c_{j-1},$$

$$\mathrm{C} = \sum_{j > \tau(j)} |\{i < j;\ \tau(i) \geqslant j \text{ ou } j > \tau(i) > \tau(j)\}|$$
$$= \sum_{j > \tau(j)} |\{i < j;\ \tau(i) \geqslant j\} + \sum_{j > \tau(j)} |\{i < j;\ \tau(j) < \tau(i) < j\}|.$$

Or la dernière somme peut s'écrire

$$\sum_{j > \tau(j)} |\{i < j;\ \tau(j) < \tau(i) < j\}| = |\{(i, j); i < \tau(j) < \tau(i) < j\}| + |\{(i, j);\ \tau(j) < i \leqslant \tau(i) < j\}|$$
$$+ |\{(i, j);\ \tau(j) < \tau(i) < i < j\}| = \mathrm{cr}(\tau) + 2\mathrm{pbr}(\tau) + \sum_{i = \tau(i)} |\{l < i;\ \tau(l) \geqslant i\}|.$$

D'où

$$\mathrm{C} = \mathrm{cr}(\tau) + 2\,\mathrm{pbr}(\tau) + \sum_{j \in \mathrm{Des}(c)} c_{j-1} + \sum_{j \in \mathrm{Pal}(c)} c_{j-1}.$$

Par suite, on a

$$\mathrm{inv}(\tau) = \mathrm{cr}(\tau) + 3\,\mathrm{pbr}(\tau) + \sum_{j \in \mathrm{Des}(c)} c_{j-1} + 2 \sum_{j \in \mathrm{Pal}(c)} c_{j-1}.$$

En remplaçant $\mathrm{cr}(\tau)$ et $\mathrm{pbr}(\tau)$ par leurs valeurs, on obtient la relation (3.2).

ˀˀ

(c) Enfin, nous allons démontrer la relation (3.3) par récurrence sur n. La définition 2.1 et les propriétés (P_1) et (P_2) du Théorème 2.2 nous permettent d'écrire:

$$D(\tau) = \sum_{i \in \mathrm{Des}(c)} i - \sum_{i \in \mathrm{Mont}(c)} i.$$

Supposons que, pour tout chemin de Motzkin $c = (c_0, \ldots, c_l)$ de longueur $l < n$, on ait

$$\sum_{i \in \mathrm{Des}(c)} i - \sum_{i \in \mathrm{Mont}(c)} i = c_0 + c_1 + \cdots + c_l.$$

Soient $c = (c_0, \ldots, c_n)$ un chemin de longueur n et k le plus petit entier > 0 tel que $c_k = 0$.

Si $k = 1$, posons $c'_i = c_{i+1}$ pour tout $i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$. Alors $c' = (c'_0, \ldots, c'_{n-1})$ est un chemin de Motzkin de longueur $n-1$ tel que

$$\begin{cases} i \in \mathrm{Des}(c) \Leftrightarrow i-1 \in \mathrm{Des}(c'); \\ i \in \mathrm{Mont}(c) \Leftrightarrow i-1 \in \mathrm{Mont}(c'). \end{cases}$$

Par conséquent,

$$\sum_{i \in \mathrm{Des}(c)} i - \sum_{i \in \mathrm{Mont}(c)} i = \sum_{i \in \mathrm{Des}(c')} (i+1) - \sum_{i \in \mathrm{Mont}(c')} (i+1).$$

Or, pour tout chemin de Motzkin γ, $|\mathrm{Des}(\gamma)| = |\mathrm{Mont}(\gamma)|$. Donc, en appliquant l'hypothèse de récurrence à c', on a

$$\sum_{i \in \mathrm{Des}(c)} i - \sum_{i \in \mathrm{Mont}(c)} i = c'_0 + c'_1 + \cdots + c'_{n-1} = c_0 + c_1 + \cdots + c_n.$$

Si $k > 1$, posons

$$c'_i = c_{i+1} - 1 \quad (0 \leq i \leq k-2), \qquad c''_j = c_{j+k} \quad (0 \leq j \leq n-k).$$

Alors $c' = (c'_0, \ldots, c'_{k-2})$ et $c'' = (c''_0, \ldots, c''_{n-k})$ sont des chemins de Motzkin de longueurs $< n$, (voir, par exemple, Figure 1) tels que

$$\begin{cases} i \in \mathrm{Des}(c) \Leftrightarrow i = k \text{ ou } (i < k \text{ et } i-1 \in \mathrm{Des}(c')) \text{ ou } (i > k \text{ et } i-k \in \mathrm{Des}(c'')); \\ i \in \mathrm{Mont}(c) \Leftrightarrow i = 1 \text{ ou } (1 < i < k \text{ et } i-1 \in \mathrm{Mont}(c')) \text{ ou } (i > k \text{ et } i-k \in \mathrm{Mont}(c'')). \end{cases}$$

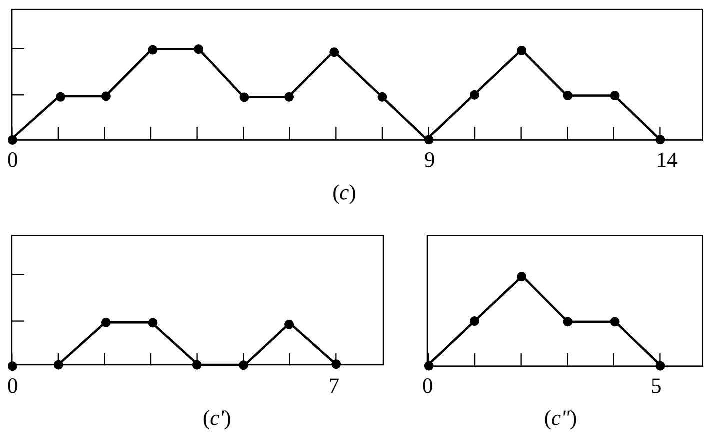

FIGURE 1.

Par suite,

$$\sum_{i\in\mathrm{Des}(c)} i - \sum_{i\in\mathrm{Mont}(c)} i = \Big[k + \sum_{i\in\mathrm{Des}(c')} (i+1) + \sum_{i\in\mathrm{Des}(c'')} (i+k)\Big]$$
$$- \Big[1 + \sum_{i\in\mathrm{Mont}(c')} (i+1) + \sum_{i\in\mathrm{Mont}(c'')} (i+k)\Big]$$
$$= k - 1 + \Big(\sum_{i\in\mathrm{Des}(c')} i - \sum_{i\in\mathrm{Mont}(c')} i\Big) + \Big(\sum_{i\in\mathrm{Des}(c'')} i - \sum_{i\in\mathrm{Mont}(c'')} i\Big).$$

D'où

$$\sum_{i\in\mathrm{Des}(c)} i - \sum_{i\in\mathrm{Mont}(c)} i = k - 1 + c'_0 + c'_1 + \cdots + c'_{k-2} + c''_0 + c''_1 + \cdots + c''_{n-k}.$$

Il suffit alors de remplaçer les c'_i et c''_j par leurs valeurs. □

Proposition 3.2. *Soient c un chemin de Motzkin de longueur n et $\mathscr{C}$ l'ensemble des involutions de $[n]$ associées à c par la bijection Φ. Alors*

$$\mu(c) := \sum_{\tau\in\mathscr{C}} x^{\mathrm{fix}(\tau)} y^{\mathrm{cr}(\tau)} z^{\mathrm{pbr}(\tau)} u^{\mathrm{D}(\tau)} q^{\mathrm{inv}(\tau)} = \prod_{i=1}^{n} \mu_i(c)$$

où

$$\mu_i(c) = \begin{cases} u^{c_{i-1}} & si\ i \in \mathrm{Mont}(c); \\ u^{c_{i-1}} q^{2c_{i-1}-1} [c_{i-1}]_{y,zq^2} & si\ i \in \mathrm{Des}(c); \\ x u^{c_{i-1}} q^{2c_{i-1}} & si\ i \in \mathrm{Pal}(c). \end{cases}$$

Démonstration. Soit $\tau \in \mathrm{Invol~}(n)$, $\tau = \Phi(c, \alpha)$. D'après le Théorème 2.2 et la Proposition 3.1, on a:

$$x^{\mathrm{fix}(\tau)} y^{\mathrm{cr}(\tau)} z^{\mathrm{pbr}(\tau)} u^{\mathrm{D}(\tau)} q^{\mathrm{inv}(\tau)}$$
$$= \Big(\prod_{i\in\mathrm{Pal}(c)} x u^{c_{i-1}} q^{2c_{i-1}}\Big)\Big(\prod_{i\in\mathrm{Mont}(c)} u^{c_{i-1}}\Big)\Big(\prod_{i\in\mathrm{Des}(c)} y^{c_{i-1}-\alpha_i} z^{\alpha_i - 1} u^{c_{i-1}} q^{2c_{i-1}+2\alpha_i-3}\Big).$$

Par conséquent,

$$\mu(c) = \Big(\prod_{i\in\mathrm{Pal}(c)} x u^{c_{i-1}} q^{2c_{i-1}}\Big)\Big(\prod_{i\in\mathrm{Mont}(c)} u^{c_{i-1}}\Big)\Big(\prod_{i\in\mathrm{Des}(c)} \sum_{\alpha_i\in[c_{i-1}]} y^{c_{i-1}-\alpha_i} z^{\alpha_i - 1} u_{c_{i-1}} q^{2c_{i-1}+2\alpha_i-3}\Big).$$

Après simplification, on obtient le résultat. □

On obtient alors le Théorème 1.1 en appliquant le Théorème 1.3 avec

$$a_n = u^n, \qquad b_n = u^n q^{2n-1} [n]_{y,zq^2}, \qquad c_n = x u^n q^{2n}.$$ □

4. Quelques Propriétés des Spécialisations de $\mathrm{I}_n(x, y, z, u, q)$

Nous allons d'abord établir des relations entre les statistiques 'cr', 'pbr', 'D', 'inv' et 'pc'.

Proposition 4.1. *Pour toute involution τ, on a:*

$$2(\mathrm{D}(\tau) - \mathrm{cr}(\tau)) = \mathrm{pc}(\tau) + \mathrm{inv}(\tau). \tag{4.1}$$

De plus, si τ est une involution sans point fixe de $[2n]$, *alors*

$$2(\mathrm{cr}(\tau)+\mathrm{pbr}(\tau))=\mathrm{D}(\tau)-n, \tag{4.2}$$

$$\mathrm{inv}(\tau)-2\mathrm{pbr}(\tau)=\mathrm{D}(\tau). \tag{4.3}$$

DÉMONSTRATION. Soient $\tau\in\mathrm{Invol}(n)$ et $(c,\alpha)=\Phi^{-1}(\tau)$. Les relations (3.1) et (3.3) entraînent que

$$2(\mathrm{D}(\tau)-\mathrm{cr}(\tau))=\sum_{i\in\mathrm{Mont}(c)}2c_{i-1}+\sum_{i\in\mathrm{Des}(c)}2\alpha_i+\sum_{i\in\mathrm{Pal}(c)}2c_{i-1}.$$

Or, dans un chemin de Motzkin, le nombre de descentes de niveau k est égal au nombre de montées de niveau $k-1$. Donc

$$\sum_{i\in\mathrm{Mont}(c)}c_{i-1}=\sum_{i\in\mathrm{des}(c)}(c_{i-1}-1).$$

Par conséquent,

$$2(\mathrm{D}(\tau)-\mathrm{cr}(\tau))=\sum_{i\in\mathrm{Des}(c)}(2c_{i-1}+2\alpha_i-2)+\sum_{i\in\mathrm{Pal}(c)}2c_{i-1},$$

c'est-à-dire, en tenant compte de la relation (3.2),

$$2(\mathrm{D}(\tau)-\mathrm{cr}(\tau))=\mathrm{inv}(\tau)+|\mathrm{Des}(c)|=\mathrm{inv}(\tau)+\mathrm{pc}(\tau).$$

Les relations (4.2) et (4.3) se démontrent de la même façon. □

REMARQUE. La relation (4.1) entraîne que le polynôme $\mathrm{I}_n(1,x^{-2},1,x^2,x^{-1})$ dénombre les involutions de $[n]$ selon le nombre de leurs pics de cycles.

PROPOSITION 4.2. *On a les propriétés suivantes:*

(i) *Pour tout* $n\geqslant 0$, *on a:*

$$\mathrm{I}_n(x,yq^2,z,u,q)=\mathrm{I}_n(x,zq^2,y,u,q), \tag{4.4}$$

$$\mathrm{I}_n(0,0,zq^{-2},u,q)=\mathrm{I}_n(0,0,zu^{-2},q,u), \tag{4.5}$$

$$\mathrm{I}_n(0,y,0,u,q)=\mathrm{I}_n(0,y,0,q,u). \tag{4.6}$$

(ii) *En posant* $\mathrm{K}_n(x)=\mathrm{I}_n(x,y^2,0,u,q)$, $\mathrm{K}_n(x)$ *satisfait la relation* $(n\geqslant 2)$

$$\mathrm{K}_n(x)=x\mathrm{K}_{n-1}(x)+\sum_{o\leqslant j\leqslant n-2}q^{j+1}y^ju^{j+1}\mathrm{K}_j(xqy^{-1})\mathrm{K}_{n-2-j}(x) \tag{4.7}$$

avec $\mathrm{K}_0(x)=1$ *et* $\mathrm{K}_1(x)=x$.
En particulier, les polynômes $\mathrm{M}_n(x)$ $(n\geqslant 2)$ *définis par la récurrence*

$$\mathrm{M}_n(x)=x\mathrm{M}_{n-1}(x)+\sum_{o\leqslant k\leqslant n-2}\mathrm{M}_k(x)\mathrm{M}_{n-k-2}(x) \tag{4.8}$$

avec $\mathrm{M}_0(x)=1$ *et* $\mathrm{M}_1(x)=x$, *énumèrent les involutions sans paire imbriquée* (*resp. sans croisement*) *selon le nombre de leurs points fixes.*

DÉMONSTRATION. La relation (4.4) se déduit facilement des propriétés de la fraction continue (1.1) en remarquant que $[n]_{a,b} = [n]_{b,a}$.

Les relations (4.5) et (4.6) sont des conséquences immédiates du Théorème 1.1 et de la relation (4.3).

Posons maintenant

$$f(x;t) = \sum_{n\geqslant 0} \mathrm{K}_n(x)t^n. \tag{4.9}$$

Alors on a

$$f(x;t) = \frac{1}{1 - xt - uqt^2 f(x;t) f(qxy^{-1}; qyut)}$$

ou encore

$$(1-xt)f(x;t) - uqt^2 f(x;t)f(qxy^{-1}; qyut) = 1. \tag{4.10}$$

En substituant (4.9) dans (4.10) et en identifiant les coefficients de t^n, on obtient la relation (4.7).

Enfin, en comparant les relations (4.7) et (4.8), on a $\mathrm{M}_n(x) = \mathrm{I}_n(x, 1, 0, 1, 1)$. Donc, en vertu de la relation (4.4) et du Théorème 1.1, $\mathrm{M}_n(x)$ énumère les involutions sans paire imbriquée (resp. sans croisement) de $[n]$ selon le nombre de leurs points fixes. □

Dans le Théorème 1.1, en prenant $x = 0$, $z = u = q = 1$, $y = q$ puis $x = 0$, $y = u = q = 1$, $z = q$ et enfin $x = 0$, $u = q = 1$, $y = q$ et $z = q^2$, nous retrouvons la formule de de Médicis et Viennot suivante [15].

PROPOSITION 4.2 *Si $h^I_{n,q}$ et $h^{II}_{n,q}$ désignent respectivement les moments des q-polynômes de Hermite de* 1*-ère et* 2*-ème espèces, alors*

$$h^I_{2n,q} = \sum q^{\mathrm{cr}(\tau)} = \sum q^{\mathrm{pbr}(\tau)}, \qquad h^{II}_{2n,q} = \sum q^{\mathrm{cr}(\tau)+2\mathrm{pbr}(\tau)}$$

oú les sommations sont étendues à toutes les involutions sans point fixe de $[2n]$.

COROLLAIRE 4.3. *On a l'identité:*

$$h^{II}_{2n,q^2} = q^{-n} \sum_{\tau} q^{\mathrm{inv}(\tau)}$$

où la sommation est étendue à toutes les involutions sans point fixe de $[2n]$.

DÉMONSTRATION. D'après les relations (4.2) et (4.3), on a

$$2(\mathrm{cr}(\tau) + 2\,\mathrm{pbr}(\tau)) = \mathrm{inv}(\tau) - n.$$

D'où le résultat. □

5. q-ANALOGUES DES NOMBRES DE CATALAN

Dans cette partie, on se propose d'étudier le polynôme $\mathrm{C}_n(x, y, z)$ défini par

$$\mathrm{C}_n(x, y, z) = \mathrm{I}_{2n}(0, 0, x, y, z)$$

et de donner d'autres interprétations combinatoires aux polynômes $\tilde{\mathrm{C}}_n(q)$ définis par la relation (1.5).

Notons $\mathcal{T}_{2n}$ l'ensemble des involutions sans point fixe et sans croisement de $[2n]$ et $\bar{\mathcal{T}}_{2n}$ l'ensemble des involutions sans point fixe et sans paire imbriquée de $[2n]$.

Soit τ une involution de $[n]$ et $(c, \alpha) = \Phi^{-1}(\tau)$. D'après la relation (3.1), τ est sans croisement (resp. sans paire imbriquée) si et seulement si

$$\alpha_i = c_{i-1} (\text{resp. } \alpha_i = 1) \qquad \text{pour tout } i \in \mathrm{Des}(c). \tag{5.1}$$

Dans ce cas, les relations (3.3) et (4.1) (resp. la relation (3.2)) entraînent que

$$\mathrm{inv}(\tau) = 2(c_0 + c_1 + \cdots + c_n) - |\mathrm{Des}(c)|$$

$$\Big(\text{resp. } \mathrm{inv}(\tau) = c_0 + c_1 + \cdots + c_n + \sum_{i \in \mathrm{Pal}(c)} c_{i-1}\Big).$$

Comme l'ensemble des chemins simplement marqués (c, α) de longueur n vérifiant (5.1) peut être identifié à l'ensemble des chemins de Motzkin de longueur n, alors on a le résultat suivant.

Proposition 5.1. Φ *envoie l'ensemble des chemins de Motzkin de longueur* n *sur l'ensemble ses involutions sans croisement* (*resp. sans paire imbriquée*) *de* $[n]$ *telle que, si* $\tau = \Phi(c)$,

$$\mathrm{inv}(\tau) = 2(c_0 + c_1 + \cdots + c_n) - |\mathrm{Des}(c)| \tag{5.2}$$

$$\Big(\text{resp. } \mathrm{inv}(\tau) = c_0 + c_1 + \cdots + c_n + \sum_{i \in \mathrm{Pal}(c)} c_{i-1}\Big). \tag{5.3}$$

En conséquence, le cardinal de $\mathcal{T}_{2n}$(*resp.* $\bar{\bar{\mathcal{T}}}_{2n}$) *est égal au nombre de Catalan* C_n.

Remarque. Le polynôme $\mathrm{M}_n(x)$ défini par la relation (4.8) dénombre donc les chemins de Motzkin de longueur n selon le nombre de leurs paliers.

D'autre part, d'après le Théorème 1.1, on a l'interprétation suivante:

$$\mathrm{C}_n(x, y, z) = \sum_{\tau \in \mathcal{T}_{2n}} x^{\mathrm{pbr}(\tau)} y^{\mathrm{D}(\tau)} z^{\mathrm{inv}(\tau)}.$$

Proposition 5.2. *Les* $\mathrm{C}_n(x, y, z)$ $(n \geqslant 1)$ *satisfont la relation de récurrence*

$$\mathrm{C}_n(x, y, z) = \sum_{0 \leqslant k \leqslant n-1} x^k y^{2k+1} z^{4k+1} \mathrm{C}_k(x, y, z) \mathrm{C}_{n-1-k}(x, y, z) \tag{5.4}$$

avec la condition initiale $\mathrm{C}_0(x, y, z) = 1$.

Démonstration. D'après la relation (4.4),

$$\mathrm{C}_n(x, y, z) = \mathrm{I}_{2n}(0, xz^2, 0, y, z).$$

En remarquant que $\mathrm{I}_{2n+1}(0, y, z, u, q) = 0$, pour tout n, la relation (4.7) implique que

$$\mathrm{C}_n(x^2, y, z) = \sum_{0 \leqslant k \leqslant n-1} x^{2k} y^{2k+1} z^{4k+1} \mathrm{C}_k(x^2, y, z) \mathrm{C}_{n-1-k}(x^2, y, z).$$

En remplaçant x^2 par x, on obtient la Proposition 5.2. □

On voit que $\mathrm{C}_n(1, q, 1)$ et $\mathrm{C}_n(1, 1, q)$ sont des q-analogues des nombres de Catalan.

On déduit le résultat suivant, en tenant compte des relations (3.3), (4.2) et (4.3).

PROPOSITION 5.3. *On a les identités suivantes:*

$$\begin{aligned}
\mathrm{C}_n(x, y, z) &= \mathrm{C}_n(xz^2, yz, 1) &&= \mathrm{C}_n(xy^{-2}, 1, yz),\\
\mathrm{C}_n(x^2, y, z) &= \mathrm{C}_n(1, x^{-1}y, xz),\\
\mathrm{C}_n(1, q, 1) &= q^n \sum_{\tau\in\mathscr{T}_{2n}} q^{2\mathrm{pbr}(\tau)} &&= \sum_{c\in\mathrm{Dyck}(2n)} q^{c_0+\cdots+c_{2n}}\\
&= \sum_{\tau\in\bar{\mathscr{T}}_{2n}} q^{\mathrm{inv}(\tau)} &&= \sum_{\tau\in\bar{\mathscr{T}}_{2n}} q^{\mathrm{D}(\tau)},\\
\mathrm{C}_n(1, 1, q) &= q^{-n} \sum_{\tau\in\mathscr{T}_{2n}} q^{2\mathrm{D}(\tau)} &&= q^{-n} \sum_{\tau\in\bar{\mathscr{T}}_{2n}} q^{2\mathrm{inv}(\tau)}.
\end{aligned}$$

où Dyck$(2n)$ *désigne l'ensemble des chemins de Dyck de longueur* $2n$.

Il vient de la relation (5.4) que $\mathrm{C}_n(q, 1, 1) = \tilde{C}_n(q)$; ce qui nous permet d'établir le résultat suivant.

PROPOSITION 5.4. *On a les interprétations suivantes:*

$$\tilde{\mathrm{C}}_n(q) = \sum_{\tau\in\mathscr{T}_{2n}} q^{\mathrm{pbr}(\tau)} = \sum_{\tau\in\bar{\mathscr{T}}_{2n}} q^{\mathrm{cr}(\tau)}, \tag{5.5}$$

$$\tilde{\mathrm{C}}_n(q) = \mathrm{C}_n(q^{-1}, q^{-1}, q) = \mathrm{C}_n(q^3, q, q^{-1}), \tag{5.6}$$

$$\tilde{\mathrm{C}}_n(q^2) = \mathrm{C}_n(1, q^{-1}, q) = q^{-n} \sum_{\tau\in\bar{\mathscr{T}}_{2n}} q^{\mathrm{inv}(\tau)} = q^{-n} \sum_{c\in\mathrm{Dyck}(2n)} q^{c_0+\cdots+c_{2n}}, \tag{5.7}$$

$$\tilde{\mathrm{C}}_n(q^4) = \mathrm{C}_n(q^2, q^{-1}, q).$$

DÉMONSTRATION. D'après ce qui précède, $\tilde{\mathrm{C}}_n(q) = \mathrm{C}_n(q, 1, 1)$. Donc

$$\tilde{\mathrm{C}}_n(q) = \sum_{\tau\in\mathscr{T}_{2n}} q^{\mathrm{pbr}(\tau)}$$

et la relation (4.4) implique que

$$\tilde{\mathrm{C}}_n(q) = \sum_{\tau\in\bar{\mathscr{T}}_{2n}} q^{\mathrm{cr}(\tau)}.$$

Les relations (5.6), (5.7) et (5.8) se déduisent de la Proposition 5.3. □

6. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 1.2

Comme le cas des involutions, nous allons construire une bijection entre $\mathscr{G}_{2n}$ et une certaine classe de chemins valués de longueur $2n$ que nous appellerons *histoires de Genocchi.*

DÉFINITION 6.1. Une *histoire de Genocchi* de longueur $2n$ est un couple (γ, p) où $(\gamma = (\gamma_0, \ldots, \gamma_{2n})$ est un chemin de Dyck de longueur $2n$ et $p = (p_1, \ldots, p_{2n})$ une suite de $2n$ entiers telle que $0 \leqslant p_i \leqslant \lceil \frac{1}{2}\gamma_{i-1} \rceil - 1$ si $i \in \mathrm{Des}(\gamma)$ et $0 \leqslant p_i \leqslant \lceil \frac{1}{2}\gamma_{i-1} \rceil$ si $i \in \mathrm{Mont}(\gamma)$.

THÉORÈME 6.2. *Il existe une bijection Ψ de $\mathcal{G}_{2n}$ sur l'ensemble des histoires de Genocchi de longueur $2n$ telle que, si $(\gamma, p) = \Psi(\sigma)$,*

$$\mathrm{Des}(\gamma) = \{\sigma(1), \sigma(3), \ldots, \sigma(2n-1)\}, \qquad \mathrm{Mont}(\gamma) = \{\sigma(2), \sigma(4), \ldots, \sigma(2n)\}. \tag{6.1}$$

De plus,

$$\mathrm{inv}(\sigma) = \sum_{i=1}^{2n} \left(\left\lceil \frac{\gamma_{i-1}}{2} \right\rceil + p_i \right);$$

$$\mathrm{fix}(\sigma) = \left| \left\{ 2i \in \mathrm{Mont}(\gamma); p_{2i} = \frac{\gamma_{2i-1} + 1}{2} \right\} \right|.$$

DÉMONSTRATION. Soit σ une permutation de Genocchi de $[2n]$ et définissons (γ, p) comme suit:
(1) $\gamma = (\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_{2n})$ est le chemin défini par la relation (6.1);
(2) $p = (p_1, p_2, \ldots, p_{2n})$ est une suite de $2n$ entiers telle que

$$p_i = \begin{cases} |\{2l-1; 1 \leqslant l < k, \sigma(2l-1) > \sigma(2k-1)\}| & \text{si } i = \sigma(2k-1); \\ |\{2l; k < l \leqslant n, \sigma(2l) < \sigma(2k)\}| & \text{si } i = \sigma(2k). \end{cases} \tag{6.2}$$

En d'autres termes, $p_{\sigma(1)} p_{\sigma(3)} \cdots p_{\sigma(2n-1)}$ est la table d'inversion (à gauche) de $\sigma(1)\sigma(3) \cdots \sigma(2n-1)$ et $p_{\sigma(2)} p_{\sigma(4)} \cdots p_{\sigma(2n)}$ la table d'inversion à droite de $\sigma(2)\sigma(4) \cdots \sigma(2n)$.

La méthode de détermination des p_i est donc analogue à celle utilisée par Foata et Zeilberger dans [10].

Montrons d'abord que (γ, p) ainsi défini est bien une histoire de Genocchi. La relation (6.1) est équivalente à

$$\text{Pour tout } i \in [2n] \qquad (i \in \mathrm{Des}(\gamma) \Leftrightarrow \sigma^{-1}(i) < i).$$

Par suite, on a, pour tout $i \in [2n]$,

$$\gamma_i = \gamma_{i-1} + \chi(\sigma^{-1}(i) \geqslant i) - \chi(\sigma^{-1}(i) < i)$$

où

$$\chi(A) = \begin{cases} 1 & \text{si A est un énoncé vrai;} \\ 0 & \text{si A est un énoncé faux;} \end{cases}$$

D'où

$$\begin{aligned} \gamma_i &= |\{j \leqslant i; \sigma^{-1}(j) \geqslant j\}| - |\{j \leqslant i; \sigma^{-1}(j) < j\} \\ &= 2|\{j \leqslant i; \sigma^{-1}(j) \geqslant j\}| - i \\ &= 2[|\{l \leqslant i; \sigma(l) \leqslant l\}| + |\{j \leqslant i; \sigma^{-1}(j) > i\}|] - i \\ &= 2\left\lceil \frac{i-1}{2} \right\rceil - i + 2|\{j \leqslant i; \sigma^{-1}(j) > i\}| \\ &= 2\left\lceil \frac{i-1}{2} \right\rceil - i + 2|\{j \leqslant i; \sigma(j) > i\}| \end{aligned}$$

où $\lceil x \rceil$ désigne le plus petit entier $\geqslant x$.

On a alors les identités suivantes ($1 \leq k \leq n$):

$$\begin{aligned}\gamma_{2k-1} &= 2\,|\{j \leq 2k-1;\, \sigma(j) > 2k-1\}| - 1\\ &= 2\,|\{j \leq 2k-1;\, \sigma^{-1}(j) > 2k-1\}| - 1; \qquad (6.3)\\ \gamma_{2k} &= 2\,|\{j \leq 2k;\, \sigma(j) > 2k\}| = 2\,|\{j \leq 2k;\, \sigma^{-1}(j) > 2k\}|.\end{aligned}$$

Il en résulte que γ est bien un chemin de Dyck. Par ailleurs, les relations (6.1) et (6.2) impliquent que

$$\begin{cases} 0 \leq \mathrm{p_i} \leq \left\lceil \dfrac{\gamma_{i-1}}{2} \right\rceil - 1 & \text{si } i \in \mathrm{Des}(\gamma);\\ 0 \leq p_i \leq \left\lceil \dfrac{\gamma_{i-1}}{2} \right\rceil & \text{si } i \in \mathrm{Mont}(\gamma). \end{cases} \qquad (6.4)$$

On définit ainsi une application Ψ: $\sigma \mapsto (\gamma, p)$ de $\mathscr{G}_{2n}$ dans l'ensemble des histoires de Genocchi de longueur $2n$. Montrons qu'elle est bijective. Pour cela, soient (γ, p) une histoire de Genocchi de longueur $2n$ et σ un antécédent de (γ, p) par Ψ, s'il existe.

Notons $m_1 < m_2 < \cdots < m_n$ les éléments ordonnés de $\mathrm{Mont}(\gamma)$ et $d_1 < d_2 < \ldots < d_n$ ceux de $\mathrm{Des}(\gamma)$. Alors la donnée de $p_{d_1}, p_{d_2}, \ldots, p_{d_n}$ (resp. $p_{m_1}, p_{m_2}, \ldots, p_{m_n}$) détermine entièrement $\sigma(1), \sigma(3), \ldots, \sigma(2n-1)$ (resp. $\sigma(2), \sigma(4), \ldots, \sigma(2n)$).

En effet, posons, pour simplifier, $\mathrm{I}_n = \{1, 3, \ldots, 2n-1\}$, $\mathrm{M}_n = \{m_1, m_2, \ldots, m_n\}$. Nécessairement, on a, d'une part,

$\sigma^{-1}(d_1)$ est le $(p_{d_1} + 1)$-ème élément de I_n;

$\sigma^{-1}(d_2)$ est le $(p_{d_2} + 1)$-ème élément de $\mathrm{I}_n \backslash \{\sigma^{-1}(d_1)\}$;

$\vdots$

$\sigma^{-1}(d_k$ est le $(p_{d_k} + 1)$-ème élément de $\mathrm{I}_n \backslash \{\sigma^{-1}(d_1), \sigma^{-1}(d_2), \ldots, \sigma^{-1}(d_{k-1})\}$;

$\vdots$

et d'autre part,

si l_1 est le plus grand entier tel que le $(l_1 + 1)$-*ème élément* m_1^* de M_n vérifie $p_{m_1^*} = l_1$, alors $\sigma^{-1}(m_1^*) = 2$;

si l_2 est le plus grand entier tel que le $(l_2 + 1)$-ème élément m_2^* de $\mathrm{M}_n \backslash \{m_1^*\}$ vérifie $p_{m_2^*} = l_2$, alors $\sigma^{-1}(m_2^*) = 4$;

$\vdots$

si l_k est le plus grand entier tel que le $(l_k + 1)$-ème élément m_k^* de $\mathrm{M}_n \backslash \{m_1^*, m_2^*, \ldots, m_{k-1}^*\}$ verifie $p_{m_k^*} = l_k$, alors $\sigma^{-1}(m_k^*) = 2k$.

$\vdots$

Remarquons que l_k existe car si $m_1^{(k)}$ est le premier élément de $\mathrm{M}_n \backslash \{m_1^*, m_2^*, \ldots, m_{k-1}^*\}$, alors $p_{m_1^{(k)}} = 0$.

Par conséquent, pour tout $k \in [n]$, $\sigma^{-1}(d_k)$ est inférieur ou égal au $(p_{d_k} + k)$-ème élément de I_n, i.e. $\sigma^{-1}(d_k) < 2(p_{d_k} + k)$, et, comme m_k^* est égal à un certain m_{l_k+j} $(1 \leq j \leq k)$, $l_k = p_{m_{l_k+j}} \leq \lceil \frac{1}{2}(\gamma_{m_{l_k+j}-1}) \rceil$.

Or, comme $\gamma_{i-1} = |\{j < i; j \in \mathrm{Mont}(\gamma)\}| - |\{j < i; j \in \mathrm{Des}(\gamma)\}|$ pour tout $i \in [n]$, on a, pour tout $k \in [n]$,

$$\gamma_{d_k-1} = d_k - 2k + 1, \qquad \gamma_{m_k-1} = -m_k + 2k - 1.$$

Donc, en vertu de la relation (6.4), on a, pour tout $k \in [n]$,

$$\sigma^{-1}(d_k) < 2\left(\left\lceil \frac{\gamma_{d_k-1}}{2} \right\rceil - 1 + k\right) = 2\left\lceil \frac{d_k - 1}{2} \right\rceil \leq d_k,$$

et

$$l_k \leqslant \left\lceil \frac{\gamma_{m_{l_k+j}-1}}{2} \right\rceil = l_k - \left\lceil \frac{m_{l_k+j}-2j}{2} \right\rceil.$$

Ce qui implique nécessairement que, pour tout $k \in [n]$,

$$m_k^* = m_{l_k+j} \leqslant 2k.$$

La permutation σ ainsi obtenue est bien une permutation de Genocchi.

L'égalité $\mathrm{fix}(\sigma) = |\{2i \in \mathrm{Mont}(\gamma);\ p_{2i} = \frac{1}{2}(\gamma_{2i-1}+1)\}|$ se déduit des relations (6.2) et (6.3). Quant à $\mathrm{inv}(\sigma)$, on peut écrire

$$\mathrm{inv}(\sigma) = \sum_{j<\sigma(j)} |\{i<j;\ \sigma(i)>\sigma(j)\}| + \sum_{j\geqslant\sigma(j)} |\{i<j;\ \sigma(i)>\sigma(j)\}|.$$

La première somme est égale à $\sum_{k>\sigma^{-1}(k)} |\{i<\sigma^{-1}(k);\ \sigma(i)>k\}|$, soit $\sum_{k\in\mathrm{Des}(\gamma)} p_k$ d'après (6.2). La deuxième peut s'écrire

$$\begin{aligned}
&\sum_{j\geqslant\sigma(j)} |\{i<j;\ \sigma(i)>j\}| + \sum_{j\geqslant\sigma(j)} |\{i<j;\ \sigma(j)<\sigma(i)\leqslant j\}| \\
&\quad = \sum_{j=1}^{n} |\{i<2j;\ \sigma(i)>2j\}| + \sum_{j\geqslant\sigma(j)} |\{i<j;\ \sigma(j)<\sigma(i)\leqslant i\}| \\
&\qquad + \sum_{j\geqslant\sigma(j)} |\{i<j;\ i<\sigma(i)\leqslant j;\ \sigma(j)<\sigma(i)\}| \\
&\quad = \sum_{j=1}^{n} |\{i<2j;\ \sigma(i)>2j\}| + \sum_{i\leqslant\sigma^{-1}(i)} |\{j<i;\ \sigma^{-1}(j)>\sigma^{-1}(i)\}| \\
&\qquad + \sum_{i>\sigma^{-1}(i)} |\{j<i;\ \sigma^{-1}(j)\geqslant i\}|.
\end{aligned}$$

Il résulte des relations (6.2) et (6.3) que

$$\begin{aligned}
\sum_{j\geqslant\sigma(j)} |\{i<j;\ \sigma(i)>\sigma(j)\}| &= \sum_{j=1}^{n} \frac{\gamma_{2i}}{2} + \sum_{i\in\mathrm{Mont}(\gamma)} p_i + \sum_{i\in\mathrm{Des}(\gamma)} \left\lceil \frac{\gamma_{i-1}}{2} \right\rceil \\
&= \sum_{j=1}^{2n} \left\lceil \frac{\gamma_{i-1}}{2} \right\rceil + \sum_{i\in\mathrm{Mont}(\gamma)} p_i.
\end{aligned}$$

d'où le résultat. □

Soit maintenant γ un chemin de Dyck de longueur $2n$, $\mathcal{G}_{2n}(\gamma)$, l'ensemble des permutations de Genocchi de $[2n]$ associées à γ par la bijection Ψ.

PROPOSITION 6.3. *On a:*

$$\nu(\gamma) := \sum_{\sigma\in\mathcal{G}_{2n}(\gamma)} x^{\mathrm{fix}(\sigma)} q^{\mathrm{inv}(\sigma)} = \prod_{i=1}^{2n} \nu_i(\gamma)$$

où

$$\nu_{2i-1}(\gamma) = \begin{cases} q^{\gamma_{2i-2}} \left[\dfrac{\gamma_{2i-2}}{2} \right]_q & \text{si } 2i-1 \in \mathrm{Des}(\gamma); \\[2ex] \left[\dfrac{\gamma_{2i-2}}{2} + 1 \right]_q & \text{si } 2i-1 \in \mathrm{Mont}(\gamma); \end{cases}$$

et

$$\nu_{2i}(\gamma)=\begin{cases} q^{\gamma_{2i-1}}\left[\dfrac{\gamma_{2i-1}+1}{2}\right]_q & si\ 2i\in \mathrm{Des}(\gamma);\\ \left[\dfrac{\gamma_{2i-1}+1}{2}\right]_q + xq^{\frac{1}{2}(\gamma_{2i-1}+1)} & si\ 2i\in \mathrm{Mont}(\gamma).\end{cases}$$

DÉMONSTRATION. Soit $\sigma\in\mathscr{G}_{2n}(\gamma)$, $\sigma=\Psi^{-1}(\gamma,p)$. D'après le Théorème 6.2, on a:

$$x^{\mathrm{fix}(\sigma)}q^{\mathrm{inv}(\sigma)}=\prod_{2i-1\in\mathrm{Mont}(\gamma)}q^{p_{2i-1}}\prod_{2i\in\mathrm{Mont}(\gamma)}x^{\chi(p_{2i}=\frac{1}{2}(\gamma_{2i-1}+1))}q^{p_{2i}}$$
$$\times\prod_{2i-1\in\mathrm{Des}(\gamma)}q^{\gamma_{2i-2}+p_{2i-1}}\prod_{2i\in\mathrm{Des}(\gamma)}q^{\gamma_{2i-1}+p_{2i}}.$$

Par conséquent,

$$\nu(\gamma)=\prod_{2i-1\in\mathrm{Mont}(\gamma)}\sum_{k=0}^{\frac{1}{2}\gamma_{2i-2}}q^k\prod_{2i\in\mathrm{Mont}(\gamma)}\sum_{k=0}^{\frac{1}{2}(\gamma_{2i-1}+1)}x^{\chi(k=\frac{1}{2}(\gamma_{2i-1}+1))}q^k$$
$$\times\prod_{2i-1\in\mathrm{Des}(\gamma)}\sum_{k=0}^{\frac{1}{2}\gamma_{2i-2}-1}q^{\frac{1}{2}\gamma_{2i-2}+k}\prod_{2i\in\mathrm{Des}(\gamma)}\sum_{k=0}^{\frac{1}{2}(\gamma_{2i-1}+1)-1}q^{\gamma_{2i-1}+k}.$$

Après simplification, on obtient la Proposition 6.3. □

Le Théorème 1.2 s'en déduit, en appliquant le Théorème 1.3 avec

$$a_{2k-1}=[k]_q+xq^k,\qquad a_{2k}=[k+1]_q,$$
$$b_{2k-1}=q^{2k-1}[k]_q,\qquad b_{2k}=q^{2k}[k]_q,\qquad c_k=0.$$

En prenant $x=q=1$ puis $x=0$, $q=1$ dans le Théorème 1.2 et en tenant compte des résultats dans [5, 6], on retrouve les développements en fractions continues des séries génératrices ordinaires de nombres de Genocchi et des nombres de Genocchi médians suivants (voir [17] et [8]).

PROPOSITION 6.4. *On a:*

$$1+\sum_{n\geqslant1}G_{2n+2}t^n=\cfrac{1}{1-\cfrac{1\cdot1t}{1-\cfrac{1\cdot2t}{1-\cfrac{2\cdot2t}{1-\cfrac{2\cdot3t}{1-\cfrac{3\cdot3t}{\ddots}}}}}},$$

$$1+\sum_{n\geqslant1}H_{2n+1}t^n=\cfrac{1}{1-\cfrac{1^2t}{1-\cfrac{1^2t}{1-\cfrac{2^2t}{1-\cfrac{2^2t}{1-\cfrac{3^2t}{\ddots}}}}}}.$$

Remerciement

J'exprime ici toute ma reconnaissance à Anne de Médicis pour le soin qu'elle a apporté à la relecture de cet article.

References

1. G. E. Andrews, Catalan numbers, q-Catalan numbers and hypergeometric series, *J. Combin. Theory, Ser. A,* **44** (1987), 267–273.
2. P. Biane, Permutations suivant le type d'excédance et le nombre d'inversions, et interprétation combinatoire d'une fraction continue de Heine, *Europ. J. Combin.,* **14** (1993), 277–284.
3. L. Carlitz et J. Riordan, Two element lattice permutation numbers and their q-generalization, *Duke J. Math.,* **31** (1964), 371–388.
4. L. Carlitz et R. Scoville, A note of a weighted sequences, *Duke J. Math., Fibonacci Q.,* **13** (1975), 303–306.
5. D. Dumont, Interprétations combinatoires des nombres de Genocchi, *Duke Math. J.,* **41** (1974), 305–318.
6. D. Dumont et A. Randrianarivony, Dérangements et nombres de Genocchi, *Discr. Math.,* **132** (1994), 37–49.
7. D. Dumont et G. Viennot, A combinatorial interpretation of the Seidel generation of Genocchi numbers, *Ann. Discr. Math.,* **6** (1980), 77–87.
8. D. Dumont et J. Zeng, Further results on the Euler and Genocchi numbers, Aeq. Math., **47** (1994), 31–42.
9. P. Flajolet, Combinatorial aspects of continued fractions, *Discr. Math.,* **32** (1980), 125–161.
10. D. Foata et D. Zeilberger, Denert's permutation statistic is indeed Euler–Mahonian, *Stud. Appl. Math.,* **83** (1990), 31–59.
11. J. Françon, Fractions continues q-analogiques pour certaines familles de permutations et de partitions, *Ann. Sci. Math. Québec,* **16** (1992), 175–182.
12. J. Fürlinger et J. Hofbauer, q-Catalan numbers, *J. Combin. Theory, Ser. A,* **40** (1985), 248–264.
13. C. Krattenthaler, *Counting lattice paths with a linear boundary II, Oster. Akad. Wiss. Math. Natur. K1 Sitzungstber. II,* **198** (1989), 171–199.
14. A. Lucas, *Théorie des Nombres,* vol. 1, Gauthiers-Villars, Paris, 1891.
15. A. de Médicis et X. G. Viennot, Moments des q-polynômes de Laguerre et la bijection de Foata–Zeilberger, *Adv. Appl. Math.,* **15** (1994), 262–304.
16. D. Rawlings, The Euler–Catalan identity, *Europ. J. Combin.,* **9** (1988), 53–60.
17. X. G. Viennot, Théorie combinatoire des nombres d'Euler et de Genocchi, en: *Séminaire de Théorie des Nombres, exposé no. 11,* Publications de l'Université de Bordeaux I, 1980.

Received 10 January 1996 and accepted 17 January 1996

Arthur Randrianarivony
Département de Mathématiques,
Université Louis-Pasteur,
7, rue René Descartes,
67084 Strasbourg Cedex, France